EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO

The problem of elementary algebra within the anthropological theory of the didactic

Gascón, J.[a], Bosch, M.[b] y Ruiz-Munzón, N.[c]

[a]Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona,
[b]IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, [c]Universitat Pompeu Fabra

Resumen

Los primeros trabajos sobre la transposición didáctica del álgebra, llevados a cabo por Yves Chevallard en la década de los 80 del siglo pasado, pusieron de manifiesto que, en primera instancia, el álgebra es un instrumento —el instrumento algebraico— que culmina en la modelización algebraica y transforma completamente las condiciones del trabajo matemático. En coherencia con esta posición epistemológica, las investigaciones desarrolladas a lo largo de los últimos 25 años sobre el álgebra elemental en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico proponen considerar este dominio como un proceso de algebrización, ampliando así el ámbito de la actividad matemática escolar en el que se suele situar el problema didáctico correspondiente. Hemos estudiado, como componentes de dicho problema, la relación entre «lo numérico» y «lo algebraico», la algebrización de la proporcionalidad, la construcción de los números enteros como objetos algebraicos y el desarrollo de la modelización algebraica hacia la modelización funcional.

Palabras clave: *teoría antropológica de lo didáctico, modelización algebraica, proceso de algebrización, problema didáctico.*

Abstract

The first studies of the didactic transposition of algebra, carried out by Yves Chevallard in the 1980s, showed that, first of all, algebra is an instrument —the algebraic instrument— which evolves towards algebraic modelling and completely transforms the conditions of the mathematical work. According to this epistemological position, research on elementary algebra developed during these last 25 years within the anthropological theory of the didactic propose to consider it as a process of algebraization, thus enlarging the school mathematical domain where the corresponding didactic problem is usually located. As components of this problem, we have studied the relationship between "the numerical" and "the algebraic", the algebraization of proportionality, the construction of integers as algebraic numbers, and the development from algebraic to functional modelling.

Keywords: *anthropological theory of the didactic, algebraic modelling, process of algebraization, didactic problem.*

1. DEL PROBLEMA DOCENTE AL PROBLEMA DIDÁCTICO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

Denominamos «problemas docentes» a los que se plantea el profesor *como tal profesor* cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las *nociones disponibles* en la cultura escolar importadas en muchas ocasiones de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, actitud, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). En el

Gascón, J., Bosch, M. y Ruiz-Munzón, N. (2017). El problema del álgebra elemental en la teoría antropológica de lo didáctico. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 25-47). Zaragoza: SEIEM.

enunciado de los problemas docentes se asumen, sin cuestionarlas, las *ideas dominantes* en la citada cultura escolar[1] (Gascón, 1999b). En el caso del álgebra elemental la formulación inicial del problema docente puede expresarse como sigue:

> ¿*Qué* tengo que enseñar a mis alumnos y *cómo* tengo que enseñarlo a propósito del álgebra elemental?, ¿cómo puedo *motivarlos* para aumentar su *interés* y mejorar su *actitud* con relación al aprendizaje del álgebra?, ¿cómo *utilizar las TIC* a fin de mejorar la *competencia algebraica* de los alumnos?

Dado que la problemática docente tiende a poner en primer plano las cuestiones relativas a las dificultades de enseñanza-aprendizaje, las investigaciones próximas a dicha problemática empiezan centrándose en estudiar las principales *dificultades de los alumnos* en el aprendizaje del álgebra y las posibles *actuaciones del profesor* para paliarlas. Así, por ejemplo, los trabajos de Booth (1984), Kieran (1981) y Vergnaud (1985) estudian las creencias iniciales de los alumnos en torno al signo de igualdad y las dificultades que estas comportan para el aprendizaje de las ecuaciones. Los trabajos de Bednarz (2001) y Filloy y Rojano (1989), entre otros, analizan las dificultades con las que se encuentran los alumnos al operar con incógnitas debido a la falta de comprensión sobre la invariancia del conjunto de soluciones de una ecuación si se aplican transformaciones equivalentes a ambos lados de esta. Muchas de las explicaciones propuestas presuponen que la permanencia en el *marco de referencia aritmético*, esto es, el hecho de que los alumnos al comenzar el estudio del álgebra continúen utilizando las nociones y los enfoques que usaban en aritmética, puede dar cuenta de las dificultades que presentan en el aprendizaje inicial del álgebra.

Desde una perspectiva *psicolingüística* algunas investigaciones sitúan el origen de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje del álgebra en la *disociación semántica/sintaxis*. Así, por ejemplo, Kaput (1987, 1996) describe el fenómeno de la *alienación del álgebra* provocada por el manejo escolar de un sistema simbólico formal aislado de todo contexto que pudiese dar significado a dichas acciones. Radford y Grenier (1996) sitúan la causa del vacío de significación que tienen las ecuaciones para los alumnos en el brusco *salto de abstracción* al que se les somete, en comparación con la lentitud del desarrollo histórico de las ecuaciones, mientras que Sfard y Linchevski (1994) sitúan el origen de las dificultades de los alumnos en la *rigidez del significado* que asignan a las expresiones algebraicas.

Para la t*eoría antropológica de lo didáctico* (TAD), en la que nos situamos, la reformulación de un problema docente para convertirlo en un problema de investigación didáctica —que, en nuestro caso, sería el problema didáctico del álgebra elemental—, requiere de manera imprescindible el cuestionamiento del ámbito de la actividad matemática involucrado. Este cuestionamiento constituye el motor de los primeros trabajos sobre la *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) y de los más específicos sobre la transposición didáctica del álgebra elemental (Chevallard, 1984, 1989a, 1989b, 1989c, 1990). Estos trabajos dieron lugar a la construcción de un ámbito de investigación didáctica en el que se inscriben numerosas investigaciones posteriores, como Gascón (1993, 1994-95, 1999a, 2001); Bolea, Bosch y Gascón (1998, 1999, 2001a, 2001b, 2004); Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2010, 2011, 2013, 2015) y las recogidas en el volumen especial de la revista *Recherche en Didactique des Mathématiques* (Coulange et al., 2012; Assude et al., 2012; Chevallard y Bosch, 2012; Grugeon et al., 2012; Ruiz-Munzón et al., 2012).

Los trabajos que forman parte de esta línea de investigación participan de un tipo de cuestionamiento que se inicia examinando qué es lo que se enseña en una institución docente bajo el apelativo de «álgebra elemental» y, complementariamente, qué actividades y conocimientos relativos al álgebra *no* se enseñan. Obviamente, dicho examen requiere que el investigador utilice un punto de vista, construido desde la didáctica, un modelo epistemológico del álgebra elemental a modo de *sistema de referencia* que proporcione criterios para decidir qué aspectos de la actividad —presentes o ausentes en la práctica escolar— pueden ser considerados como «algebraicos».

[1] No todo problema de investigación didáctica (o problema didáctico) parte necesariamente de un problema docente, pero históricamente la problemática docente ha constituido y sigue constituyendo la problemática didáctica básica.

En la sección 2, utilizando un esbozo de un *modelo epistemológico de referencia* (MER),[2] describiremos algunos aspectos de la *economía* del álgebra elemental en las diferentes instituciones, es decir, analizaremos lo que se entiende por álgebra elemental y por actividad algebraica en la clase de matemáticas, en la escuela y en la sociedad, lo que nos permitirá estudiar algunos fenómenos didácticos asociados al *modelo epistemológico dominante* (MED) en la enseñanza secundaria. Mostraremos el carácter *prealgebraico* de la matemática escolar con relación a determinados indicadores del *grado de algebrización* de una organización o *praxeología matemática* (PM) y caracterizaremos las prácticas matemáticas escolares en términos de una *aritmética generalizada*.

En la sección 3 explicitaremos el MER que proponemos mediante la caracterización de tres etapas sucesivas del *proceso de algebrización* de las PM. Mostraremos que esta interpretación del álgebra elemental, alternativa a la que se deduce del MED, esto es, del modelo implícito vigente actualmente en la enseñanza secundaria, le asigna una *nueva razón de ser* que contiene ampliamente a la razón de ser oficial, al tiempo que modifica profundamente su relación con el resto de las organizaciones matemáticas escolares.

En la sección 4 llevaremos a cabo un esbozo del análisis ecológico del álgebra elemental, esto es, empezaremos a analizar *por qué* la *relación institucional a lo algebraico* es la que se describe en la sección 2 y qué condiciones se requerirían para modificarla en una dirección determinada. En particular nos interesan las restricciones que dificultan la génesis y el desarrollo del álgebra elemental como *instrumento de modelización*.

En la sección 5, por fin, analizamos muy brevemente, desde el punto de vista que nos proporciona la TAD, la forma como el *enfoque ontosemiótico* trata el problema didáctico del álgebra elemental.

En resumen, pretendemos completar y precisar en alguna medida los resultados presentados en García (2007) y en un trabajo reciente (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2015) relativos al estudio de algunas de las cuestiones que forman parte de las tres dimensiones fundamentales —*económica*, *epistemológica* y *ecológica*— del problema didáctico del álgebra elemental (Gascón, 2011). En ningún caso tenemos la pretensión de sintetizar *todas* las aportaciones de la TAD a dicho problema.

2. ECONOMÍA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LA INSTITUCIÓN DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA: EL CARÁCTER PREALGEBRAICO DE LA MATEMÁTICA ESCOLAR

La *dimensión económica* de un problema didáctico abarca las cuestiones relativas al sistema de reglas y principios (*nomos*) que regula la organización y el funcionamiento institucional de las PM y las *praxeologías didácticas* (PD) involucradas (Gascón, 2011; Gascón y Nicolás, 2017). La actividad que hay que llevar a cabo para responder a estas cuestiones incluye la observación y la descripción detallada de los elementos praxeológicos (así como las relaciones entre ellos) efectivamente existentes en determinadas instituciones, tomando como referencia un MER y un *modelo didáctico de referencia* sustentado en él. Este análisis pretende, además de caracterizar el MED en la institución en cuestión (que, en nuestro caso, es el modelo del álgebra elemental vigente en la institución de la enseñanza secundaria), sacar a la luz los fenómenos didácticos dependientes del mismo.

Entre las cuestiones que forman parte de la dimensión económica del problema del álgebra elemental destacamos las siguientes: ¿cuál es la *unidad de análisis institucional* adecuada para estudiar la organización y el funcionamiento del álgebra elemental en secundaria? Con más precisión: ¿qué *instituciones*

[2] En trabajos anteriores hemos descrito con detalle las funciones que desempeña un MER en la metodología de investigación de la TAD. Entre dichas funciones destacamos aquí la caracterización del modelo epistemológico dominante en la institución de referencia y la función fenomenotécnica, esto es, su capacidad de sacar a la luz determinados fenómenos didácticos: «Todo MER es provisional, es una hipótesis, y debe ser contrastado empíricamente. Si un MER específico no cumple su función fenomenotécnica, deberá ser revisado y hasta modificado profundamente. La piedra de toque para decidir entre dos MER rivales cuál de ellos es más útil heurísticamente (o para decidir cómo modificar un MER a fin de poder estudiar nuevos aspectos de un fenómeno didáctico) son los hechos didácticos interpretados como fenómenos» (Gascón, 2014, p. 112).

hemos de tomar en consideración: el aula, la escuela, el sistema de enseñanza de las matemáticas, o incluso más allá? ¿Cómo se considera, cómo se describe, cómo se interpreta y, en definitiva, qué características presenta el álgebra elemental actualmente *en cada una de las instituciones* que intervienen en el proceso de transposición (especialmente en la enseñanza secundaria)? ¿Qué tipos de actividades consideradas como «algebraicas» en el MER que proponemos están presentes, y cuáles están ausentes, en la matemática escolar? ¿Cómo se puede caracterizar el *grado de algebrización* de las PM que viven en las instituciones escolares?

Dado que el MER no puede construirse sin utilizar, entre otros, los datos provenientes del sistema escolar y que, recíprocamente, para obtener dichos datos se utiliza necesariamente un MER como referencia, es obvio que ambos procesos (construir un MER del álgebra elemental y analizar el papel que desempeña «lo algebraico» en el sistema escolar) deben llevarse a cabo de manera simultánea. Por imperativos de la linealidad del texto empezaremos por exponer en esta sección el análisis de la economía del álgebra elemental (para lo cual utilizaremos elementos del MER que describiremos en la sección 3). Y para construir dicho MER será necesario, a su vez, utilizar datos empíricos provenientes del análisis económico que presentamos en esta sección.

En los trabajos de Chevallard citados anteriormente sobre la transposición didáctica del álgebra se puso de manifiesto que, en primera instancia, el álgebra es un instrumento, el *instrumento algebraico*, que culmina en la *modelización algebraica* y transforma completamente las condiciones del trabajo matemático. Posteriormente (Gascón, 1989, 1993 y 1994-1995) hemos mostrado que la *técnica algebraica se genera a partir del patrón clásico de análisis-síntesis*[3] entendido como una *técnica matemática* muy potente y flexible, capaz de abordar, mediante sus sucesivas modalidades, múltiples tipos de problemas. Su desarrollo pasa por dos etapas: en la primera emerge el *cálculo ecuacional* y en la segunda aparece el *instrumento algebraico*, esto es, la *modelización algebraica* propiamente dicha.

En esta versión incipiente del modelo alternativo, el álgebra escolar no aparece inicialmente como una organización matemática al mismo nivel que las otras organizaciones que se estudian en la escuela, sino como un *instrumento de modelización* de todas las organizaciones matemáticas escolares (Bolea, Bosch y Gascón, 1998). Hemos propuesto un conjunto de cuatro indicadores (IGA1, …, IGA4) para caracterizar el mayor o menor *grado de algebrización* de una PM (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a). Señalemos, sin embargo, que estos no constituyen un criterio de demarcación que permita trazar una frontera precisa y nítida entre una PM *algebrizada* y una *prealgebraica* (en el sentido de «todavía no algebrizada»). Postulamos que la algebrización de una PM es siempre una cuestión de grado y es por esta razón que proponemos *indicadores del grado de algebrización*. Estos indicadores hacen referencia a ciertas características estructurales y funcionales de las PM consideradas como un todo. Los criterios para elegirlos provienen de determinados principios o asunciones básicas de la TAD que podemos resumir muy brevemente como sigue: (a) la actividad matemática puede ser interpretada como una *actividad de modelización* en el sentido explicitado en múltiples trabajos (Chevallard, 1989b, 1989c; García et al., 2006; Barquero et al., 2013); (b) Tanto desde el punto de vista histórico como del propio desarrollo interno de las matemáticas, se observa un proceso de matematización progresiva que, inicialmente, podemos denominar *proceso de algebrización*[4] y que se manifiesta en la integración de las PM en otras relativamente más completas en el sentido de Bosch, Fonseca y Gascón (2004); (c) Esta integración progresiva de las PM se lleva a cabo mediante procesos de modelización intramatemática que aumentan el grado de algebrización de las PM (en el sentido que caracterizaremos en lo que sigue). Los casos de

[3] Puig y Cerdán (1990), de acuerdo con esta idea, consideran que el método de análisis-síntesis, paradigma de lo aritmético, puede abocar al álgebra con tal de que se operen en su interior transformaciones de significado similares a las que se producen en la elaboración del lenguaje algebraico.

[4] La noción de «proceso de algebrización» referida a las organizaciones matemáticas escolares, así como los primeros desarrollos de la misma, fueron expuestos por primera vez en el año 1997 en la IXème École d'Été de didactique des mathématiques en Houlgate (Francia) (Bolea, Bosch y Gascón, 1998).

la divisibilidad sobre los naturales (Gascón, 2001) y de la proporcionalidad clásica (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a), entre otros, constituyen ejemplos de este fenómeno. En resumen, los indicadores que describimos a continuación se inspiran en la forma en que la TAD interpreta la modelización matemática como instrumento de articulación (García et al., 2006) y en los *indicadores del grado de completitud* de una organización matemática local (Fonseca, 2004; Bosch, Fonseca y Gascón, 2004).

IGA1. Una PM nace siempre como respuesta a cuestiones que dan lugar, progresivamente, a diferentes *tipos de problemas*. Un primer indicador del grado de algebrización de la PM está relacionado con la posibilidad de tomar en cuenta, describir y hasta *manipular la estructura global* de estos problemas. Esto significa que una PM está más algebrizada en la medida que contiene *tipos generales de problemas* (en lugar de problemas aislados), lo que puede llegar a requerir el uso sistemático del juego entre *parámetros* e *incógnitas*.

En las PM que viven en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) raramente se plantea la cuestión de estudiar el tipo de problemas al que pertenece un problema dado y, en coherencia con este déficit, no se suele manipular la *estructura global de los tipos de problemas*. En particular, los parámetros están prácticamente ausentes, las letras juegan prioritariamente el papel de incógnitas y, en algunos casos, de variables.

IGA2. La posibilidad de *tematizar las técnicas*, tomándolas como objeto de estudio y creando así una nueva problemática a nivel tecnológico, constituye un segundo indicador del grado de algebrización de las PM. Se materializa en plantear y estudiar problemas relacionados con la descripción, la interpretación, la justificación, la producción y el alcance (o dominio de validez) de las técnicas que la integran, esto es, en un *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas.

En el currículo de la ESO no aparecen problemas cuyo objetivo sea interpretar o justificar una técnica matemática determinada. Tampoco se plantea la problemática del alcance o dominio de validez de las técnicas que se utilizan, por lo que las *limitaciones* que presentan todas las técnicas pasan completamente inadvertidas (Fonseca, Bosch y Gascón, 2010). Únicamente para tipos muy estereotipados de problemas se plantea la pregunta de las condiciones de existencia de solución y de la estructura del conjunto de soluciones. Resulta, en definitiva, que el *cuestionamiento tecnológico* (Sierra, Bosch y Gascón, 2013) está prácticamente ausente en la actividad matemática escolar.

IGA3. El grado de *unificación de las PM* constituye un tercer indicador del grado de algebrización. Esta unificación comporta, paralelamente, una reducción drástica de los instrumentos escritos (formalismos) y, en general, de los *ostensivos* (Bosch, 1994) con los que se representan y manipulan los diferentes componentes de las PM.

En dirección contraria a esta unificación, las PM que se estudian en secundaria son generalmente *puntuales*, muy *rígidas* y *aisladas*, lo que dificulta, e incluso impide, que en dicha institución se reconstruyan efectivamente PM locales relativamente completas (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004). Se observa, en definitiva, una fuerte y rápida tendencia a *atomizar la actividad matemática* y, en particular, una *desintegración del corpus algebraico* (Chevallard, 1989c).

IGA4. El cuarto y último indicador del grado de algebrización de una PM, cuando esta se ha construido como modelo algebraico de cierto sistema, viene dado por la posibilidad de *generar tipos de problemas cada vez más alejados del contexto de dicho sistema*. Cuanto más algebrizada está una PM, más posibilidades tiene de *independizarse del sistema* que modeliza.

En la enseñanza secundaria no aparecen prácticamente nunca modelos algebraicos de un sistema (ni matemático ni extramatemático) construidos con el objetivo de responder a cuestiones problemáticas que surgen en dicho sistema. Así, por ejemplo, en la escolaridad obligatoria las *fórmulas* no aparecen como el fruto de un *trabajo algebraico* ni hacen ninguna de las funciones específicas de los *modelos algebraicos* que podrían dar lugar a nuevos tipos de problemas; las fórmulas hacen únicamente el papel de *reglas para automatizar ciertos cálculos*.

En resumen, la organización matemática escolar de la enseñanza obligatoria provoca una actividad muy *atomizada*, lleva a la manipulación puramente *formal* de las expresiones algebraicas, no incluye ningún tipo de *cuestionamiento tecnológico* de las técnicas que, por otra parte, no parecen precisar justificación, y provoca la separación entre los usos de las *fórmulas* (que no desempeñan el papel de modelos) y del *lenguaje funcional*. Como conclusión general podemos decir que, tomando como referencia los cuatro indicadores descritos, la matemática escolar obligatoria está muy débilmente algebrizada y, en consecuencia, podemos hablar del *carácter prealgebraico* de la matemática escolar que interpretamos como un fenómeno didáctico.

En coherencia con este fenómeno puede caracterizarse la interpretación habitual del álgebra escolar como una *aritmética generalizada* (Bolea, 2003, pp. 70-72) que consiste en la identificación del álgebra elemental con el «simbolismo algebraico» (o lenguaje algebraico), en contraposición a, pero también como desarrollo de, un supuesto «lenguaje aritmético». Algunas de las características principales de esta interpretación del álgebra, perfectamente compatibles con el carácter prealgebraico de la matemática escolar, son las siguientes:

- El álgebra escolar se construye en un contexto exclusivamente numérico, a modo de generalización de los cálculos con números y de traducción simbólica de expresiones numérico-verbales. Se la considera como un mero epifenómeno de la aritmética.
- La resolución de un problema algebraico se identifica con la obtención de un número tal como sucede en el caso de los problemas típicos de la aritmética escolar.
- Se considera que las expresiones algebraicas surgen ante la necesidad de representar y manipular números desconocidos, se supone que esta es su razón de ser.
- El álgebra escolar se presenta, en general, muy vinculada a la aritmética y bastante aislada del resto de las organizaciones matemáticas presentes en el currículo de secundaria.
- Las tareas consideradas como específicamente «algebraicas» se reducen a la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico, a la manipulación formal de expresiones algebraicas con letras y números (lo que se suele denominar cálculo algebraico) y a la resolución de ecuaciones.
- En la escritura y manipulación de expresiones algebraicas, la aritmética generalizada hace una distinción absoluta entre los datos conocidos (valores numéricos) por un lado y las incógnitas por otro.
- Una ecuación se interpreta habitualmente como una igualdad numérica que se cumple para algunos valores concretos de las incógnitas.

En Bolea (2003) se demuestra, a partir del análisis de documentos curriculares, libros de texto y de una encuesta entre profesores, que en la enseñanza secundaria se asume acríticamente este modelo epistemológico —que identifica el álgebra elemental con una especie de aritmética generalizada— como único e incuestionable, constituyéndose así en el MED en esta institución. Esta interpretación del álgebra constituye asimismo el MER, a menudo implícito, de gran parte de las investigaciones realizadas desde la didáctica de la matemática.

3. LIMITACIONES DEL MODELO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL COMO ARITMÉTICA GENERALIZADA Y CONSTRUCCIÓN DE UN NUEVO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERENCIA

El didacta utiliza inevitablemente, como referencia, un modelo (más o menos explícito) de las praxeologías matemáticas que están en juego en el problema didáctico que aborda, esto es, un MER del ámbito de la actividad matemática en cuestión. Forman parte de la *dimensión epistemológica* del problema las cuestiones dirigidas a indagar los principios y los criterios que guiarán la construcción del citado modelo de referencia para que este cumpla sus principales objetivos, entre los que destacan: sacar a la luz y dar cuenta de fenómenos didácticos que permanecían invisibles o inexplicados y sustentar organizaciones didácticas que permitan superar determinadas limitaciones de los correspondientes procesos de estudio escolares basados en el MED en la institución escolar.

En nuestro caso nos planteamos las siguientes cuestiones: ¿cómo puede describirse el álgebra elemental mediante un MER compatible con el modelo epistemológico general de la actividad matemática que propone la TAD? ¿Cuál es la amplitud del *ámbito matemático* más adecuada para plantear el problema didáctico del álgebra elemental, esto es, qué amplitud debe abarcar un MER del álgebra elemental? ¿Debe restringirse al *marco aritmético* habitual o, por el contrario, debemos plantear el problema a un nivel más amplio que abarque la *modelización matemática* en la enseñanza secundaria? ¿Qué relaciones debe propugnar dicho MER entre «lo algebraico» y «lo numérico» y, en general, entre «lo algebraico» y el resto de áreas de la matemática escolar?

3.1. Limitaciones de la aritmética generalizada como modelo del álgebra elemental

Para justificar la necesidad de construir un modelo alternativo debemos empezar constatando algunas de las limitaciones que presenta la interpretación del álgebra elemental como aritmética generalizada. Dado que toda «limitación» lo es con referencia a ciertos principios que se asumen como referencia, para sacar a la luz dichas limitaciones tomaremos el punto de vista que propugna la TAD sobre el proceso de algebrización y cuyos primeros rasgos vienen dados por los indicadores del grado de algebrización.

3.1.1. Desarticulación entre la aritmética generalizada y la modelización funcional

Partiendo de la organización matemática clásica en torno a la *proporcionalidad de magnitudes* (Bosch, 1994) se construyen tres praxeologías situadas respectivamente en niveles progresivos de algebrización (en el sentido definido por los indicadores) y tales que cada una de ellas contiene y, en cierta forma, modeliza a la anterior. La construcción de este proceso hipotético de algebrización de la proporcionalidad clásica, ha permitido hacer visibles (construir y empezar a estudiar) dos importantes fenómenos didácticos emergentes en los actuales sistemas de enseñanza que hemos designado respectivamente como *aritmetización de la proporcionalidad* (o *evitación del álgebra*) y *aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001a). Para estudiar dichos fenómenos hemos formulado problemas didácticos tales como:

> ¿Por qué los problemas de proporcionalidad tienden a considerarse en la organización matemática escolar como problemas que forman parte de la aritmética y están alejados del ámbito algebraico?
>
> ¿Qué restricciones impiden en la matemática escolar unificar todos los tipos de proporcionalidad clásica (directa, inversa, simple y compuesta) mediante el modelo de la función lineal y alcanzar así el segundo nivel de algebrización de la proporcionalidad descrito en el proceso hipotético de algebrización?
>
> ¿Qué condiciones se requieren para que la actividad matemática alcance un nivel de algebrización (en términos de los indicadores del grado de algebrización) que haga necesaria la emergencia de la modelización funcional general descrita mediante este proceso de algebrización? (Ibíd., pp. 282-289).

Para responder a estas preguntas hay que apelar a la ausencia escolar de un *álgebra de magnitudes*[5] (en lo referente a la articulación y algebrización de la PM en torno a la proporcionalidad) y, en general, a la incidencia del MED del álgebra elemental sobre la práctica matemática escolar, lo que pone de manifiesto la necesidad de construir un nuevo MER capaz de articular el álgebra elemental con la modelización funcional general. En base a dicho MER, en García et al. (2006) se describe y experimenta un *recorrido de estudio e investigación* (REI) que articula la relación de proporcionalidad previamente algebrizada con el resto de relaciones funcionales elementales y en Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Mun-

[5] En Whitney (1968) se propone una teoría matemática para elaborar toda un «álgebra de las magnitudes». Si nos situamos en un nivel teórico más cercano al de la enseñanza secundaria, bastaría con la propuesta de Freudenthal (1973).

zón et al. (2011) se amplía el MER del álgebra elemental para incluir la modelización algebraico-funcional y sustentar un REI que permite a la comunidad de estudio superar la separación escolar entre las fórmulas «algebraicas» y el lenguaje funcional.

3.1.2. Un obstáculo didáctico relacionado con la consideración de los negativos como objetos aritméticos

La introducción escolar de los números negativos se hace habitualmente en un entorno aritmético y se apoya en modelos concretos basados en la presentación de magnitudes opuestas o relativas. En consecuencia, la razón de ser que se asigna oficialmente en secundaria a los números con signo es la de expresar la medida de dichas magnitudes y resolver problemas en los que estas aparecen. Pero, en realidad, estos problemas se resuelven de forma más económica utilizando números naturales.

Este enfoque didáctico clásico (y todavía predominante) al fomentar la concepción de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida, refuerza un obstáculo epistemológico que la comunidad matemática tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números negativos y justificar su estructura (Brousseau, 1983). De hecho, los denominados «modelos concretos» o «realistas», que se utilizan habitualmente para introducir los números negativos, contribuyen a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre estos (y sobre sus operaciones) porque enfatizan la estructura lineal, en lugar de la estructura de anillo totalmente ordenado, por lo que no es posible, por ejemplo, dar sentido a la regla del producto (Cid y Ruiz-Munzón, 2011). En definitiva, podemos afirmar que esta concepción de los negativos constituye un *obstáculo didáctico*.

Para superar este obstáculo se ha postulado la necesidad de introducir los negativos en un contexto algebraico[6], interpretando el álgebra como un instrumento de modelización (Cid y Ruiz-Munzón, 2011, Cid et al., 2017). Este nuevo punto de vista postula que una posible razón de ser de los números negativos se encuentra en las *necesidades operatorias* que emergen con la implantación del lenguaje algebraico. Este transforma los símbolos *binarios* de las operaciones aritméticas en símbolos unarios[7]. En consecuencia, los símbolos "+" y "–" que en aritmética designaban operaciones a realizar, en el lenguaje algebraico designan *sumandos* y *sustraendos* no operaciones binarias. De hecho, en el lenguaje algebraico los símbolos binarios se sobreentienden, por lo que no se escriben. Aparecen así las *operaciones entre operaciones* cuyo resultado no es, en general, un número como en aritmética sino una nueva operación.

El cálculo con sumandos y sustraendos transforma en sumas lo que en aritmética eran sumas y restas (igual que el uso de expresiones racionales transforma en productos lo que antes eran productos y cocientes). Esto simplifica el cálculo algebraico porque la suma y el producto tienen buenas propiedades (son conmutativas y asociativas).

Las necesidades operatorias del cálculo algebraico acaban dando sentido a los sumandos y sustraendos aislados, introduciendo el significado *predicativo* de los signos "+" y "–" y asumiendo que las letras que forman parte del lenguaje algebraico puedan tomar valores positivos o negativos, independientemente del signo que las preceda. En resumen, desde este punto de vista, se considera que las necesidades operatorias del cálculo algebraico (y, en última instancia, la modelización algebraica en la que

[6] Históricamente los números negativos no fueron aceptados por la comunidad matemática hasta que el grado de algebrización de las matemáticas lo hizo inevitable. Los sucesos que marcaron este hecho histórico fueron: la teoría general de ecuaciones con el teorema fundamental del álgebra (algebrización de la teoría de ecuaciones); y la emergencia de la geometría analítica con la necesaria unificación de las ecuaciones de las curvas independientemente del cuadrante en el que se situaran (algebrización de la geometría).

[7] Esta transformación tiene lugar cuando se enfatiza la diferencia como resultado de comparar (que designa una relación) frente a la resta como resultado de quitar (que designa una acción), lo que introduce las diferencias con signo y su interpretación desglosada en un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término. Se reinterpreta el signo "–" como signo operativo unario, es decir, como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos (Cid et al., 2017).

dicho cálculo culmina) son *constitutivas* de los números negativos[8]. En Cid y Ruiz-Munzón (2011) se describe la experimentación, con alumnos que inician la ESO, de un REI (denominado provisionalmente *actividad de estudio e investigación*, AEI) en el que se lleva a cabo la introducción de los números negativos en un entorno algebraico.

3.1.3. Un fenómeno histórico que se mantuvo inexplicado mientras el álgebra se interpretaba como una aritmética generalizada

Durante siglos el MED en la comunidad de historiadores de la matemática, que sigue siendo utilizado en la mayoría de libros de texto y manuales de historia de las matemáticas como su MER (lo denominaremos MER_1), situaba los orígenes del álgebra en la escuela de Alejandría y, en particular, en la obra de Diophanto. Pero las investigaciones históricas de Jacob Klein (1934/1968), utilizando un MER_2 alternativo, esto es, una nueva definición de «álgebra», mostraron claramente que la interpretación histórica que hace coincidir la génesis del álgebra con la introducción de «valores indeterminados» representados por letras, no era satisfactoria porque no permitía dar cuenta de determinados fenómenos históricos. Entre estos cabe destacar las dificultades encontradas por los griegos para resolver numerosos problemas geométricos. Estas dificultades se pueden explicar por el hecho de no disponer de instrumentos para formular los problemas geométricos en términos de operaciones y, en definitiva, por no disponer de un cálculo simbólico potente.

De hecho, para dar cuenta de estos fenómenos conviene postular, como observa Klein, que Viète creó una nueva disciplina que no estaba al alcance de los antiguos. En la génesis de esta «nueva álgebra» convergen dos enfoques independientes: el análisis geométrico de Pappus y los métodos aritméticos de Diophanto. Por lo tanto, la nueva álgebra de Viète puede ser considerada tanto aritmética como geométrica (Gascón, 1994-95).

Entre los principales rasgos del modelo epistemológico alternativo (MER_2) de la génesis del álgebra que Jacob Klein construye y utiliza para dar razón de los citados fenómenos históricos, hasta entonces inexplicados, destacamos que, más allá de la designación simbólica de ciertos objetos, el álgebra redefinida por el MER_2 se caracteriza por hacer un uso sistemático del *cálculo simbólico*, de los *parámetros* y de las *fórmulas* (que se tornan posibles por primera vez), por *tematizar el método* como tal y por interpretar que la génesis del álgebra está ligada, a la vez, a la *aritmética* y a la *geometría*. El MER que proponíamos provisionalmente en Gascón (1994-95), que reinterpreta el álgebra elemental como instrumento de modelización de sistemas de todo tipo, es completamente compatible con el MER_2 que utiliza Jacob Klein. Su formulación actual, mucho más detallada, será descrita a continuación.

3.2. Construcción de un modelo epistemológico alternativo del álgebra elemental

La formulación de este MER alternativo en términos de una sucesión creciente de PM está descrita con detalle en Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón et al. (2011). Este modelo permite hacer visibles y empezar a dar cuenta de los fenómenos reseñados en la sección 3.1, así como dar razones por las que el modelo que identifica el álgebra elemental con una especie de aritmética generalizada sigue estando vigente en las instituciones didácticas[9]. En esta sección presentamos una descripción sintética del mismo.

[8] Una característica fundamental de la modelización intramatemática es su carácter «constitutivo» del propio conocimiento matemático. En particular, el cálculo algebraico (que culmina en la modelización algebraica) es un elemento esencial de la construcción de lo numérico, tanto en la génesis histórica como en la teoría matemática, más que un simple epifenómeno de lo numérico.

[9] Es importante volver a insistir en que no sería posible comprender las limitaciones de un MER_1 (el MED en Secundaria, asumido de manera implícita en múltiples investigaciones, puede hacer aquí el papel de MER_1) si no se dispone de un MER_2 alternativo que permita formular y predecir fenómenos nuevos además de reformular los antiguos desde una perspectiva más comprensiva (Gascón, 2014).

El MER que proponemos describe el *proceso de algebrización* articulado en tres etapas, cada una de las cuales se materializa en una PM que contiene y amplía a la anterior y está generada por un tipo de problemas cuya estructura general está caracterizada de antemano[10]. Cada una de estas PM contiene las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se requieren, en principio, para estudiar y resolver los problemas que presentan la estructura característica de la etapa. Pero esto no significa que un problema concreto, cuya estructura corresponda a cualquiera de las etapas, no pueda resolverse con las técnicas de una etapa anterior. En particular, diremos que un problema se ha resuelto con *técnicas aritméticas* si la incógnita (suponiendo que sea una cantidad de cierta magnitud) se ha obtenido mediante una cadena estructurada y jerarquizada de operaciones aritméticas ejecutada a partir de los datos (que también son cantidades conocidas de ciertas magnitudes). A dicha cadena la llamaremos *programa de cálculo* (PC), siguiendo la propuesta de Chevallard (2005).

La construcción del MER del álgebra elemental se inicia entonces eligiendo como *sistema inicial a modelizar* la PM en torno a los problemas que pueden resolverse con técnicas aritméticas y que pueden enunciarse en cualquier contexto (numérico, geométrico, comercial, físico, etc.). Veamos un ejemplo en un contexto geométrico:

> *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio 6 cm. Si la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 9 cm., ¿cuánto vale el área del triángulo?*
>
> Para resolver el problema, siguiendo la indicación de Descartes en las *Reglas para la dirección del espíritu*, aplicamos el *patrón clásico de análisis-síntesis* «para realizar con los números lo que los antiguos hacían con las figuras». El *análisis* del problema parte, como siempre, de la incógnita que, en este caso, es el área del triángulo (A). Para calcular A sólo necesitamos la longitud del lado desigual que tomaremos como base (b), puesto que la altura correspondiente es un dato, 9 cm. Para calcular b basta calcular su mitad ($b/2$). Por fin, ($b/2$) puede calcularse por el teorema de Pitágoras a partir de los datos.
>
> Este *análisis* se resume en la siguiente estructura del problema:
>
> $$PC(6,9) := \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{6^2 - (9-6)^2}}{2}$$
>
> Guiada por el análisis, la *síntesis* se materializa en una cadena de operaciones aritméticas (esto es, en la *ejecución de un* PC) que parte de los datos (6 y 9) y finaliza con el cálculo de la incógnita que, en este caso, es el área del triángulo (clásicamente esta cadena de operaciones se expresaba *verbalmente*).
>
> $$9-6=3 \rightarrow 3^2=9 \rightarrow 6^2-9=27 \rightarrow \sqrt{27} \rightarrow 2\cdot\sqrt{27} \rightarrow 9\cdot 2\cdot\sqrt{27} \rightarrow 9\cdot\sqrt{27} = \text{Área}$$

El *proceso de algebrización* propiamente dicho se inicia cuando la estructura de algunos de los problemas que se formulan para avanzar en el estudio de ciertos sistemas es tal que el patrón clásico de análisis-síntesis fracasa como técnica de resolución debido a las dificultades (y hasta la imposibilidad) de descomponer el análisis del problema y su proceso de resolución (la síntesis) en una cadena de pasos sucesivos. En ese momento, el análisis pasa a ligar el objeto *incógnita* no tanto con los *datos* sino con la *condición del problema*, esto es, con una igualdad entre dos cantidades de la misma magnitud simbolizadas mediante dos expresiones algebraicas diferentes. Como consecuencia de ello, la síntesis (entendida como el proceso consistente en obtener el objeto incógnita a partir de los datos) desaparece, aunque puede ser útil para construir la condición (o condiciones) del problema. La estructura del problema se expresa entonces simbólicamente, necesariamente *por escrito*, como un todo no descomponible (Gascón, 1989, pp. 36-41 y 1993, pp. 315-320).

La *primera etapa* del proceso de algebrización surge cuando se trabaja con modelos que requieren plantear un tipo de problemas cuya estructura general toma la siguiente forma:

$$PC(x, a_1, \ldots , a_k) = y$$

[10] La delimitación de las etapas del modelo propuesto, esto es, la definición de la estructura algebraica general del tipo de problemas que caracteriza a cada una de las etapas, es relativamente arbitraria ya que, como cualquier modelo, responde a una intención de sacar a la luz y abordar ciertos fenómenos.

Donde x e y son *variables* y los a_i son *argumentos numéricos*. Un ejemplo de este tipo de problemas es el siguiente[11]:

> Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia y la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 3/2 del radio de la circunferencia. ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita?
>
> En este problema el dato es una relación (la altura relativa al lado desigual es los 3/2 del radio de la circunferencia) y la incógnita es otra relación (entre el área del triángulo y el radio de la circunferencia). El *análisis* proporciona una estructura del problema que es formalmente análoga a la del problema anterior:
>
> $$\text{Área} = PC\left(R,3,2\right) := \frac{\frac{3R}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{3R}{2}-R\right)^2}}{2}$$
>
> La *síntesis* se reduce en este caso a un proceso de *simplificación de expresiones algebraicas* que acaba con la relación $A=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

En el caso particular en que el valor numérico que toma x sea un *dato* y la *incógnita* del problema sea el correspondiente valor numérico que toma y, entonces tendremos un problema cuya solución consistirá simplemente en ejecutar el $PC(x, a_1, \dots , a_k)$ para el valor dado de x. Si, por el contrario, la *incógnita* es el valor numérico que debería tomar x para que y tome un valor numérico *dado*, entonces el problema se convierte en la resolución de una *ecuación con una incógnita*. Si la ecuación es resoluble mediante una cadena de operaciones aritméticas sin manipular la incógnita, entonces se dice que estamos ante una *ecuación aritmética*. En caso contrario, tenemos un problema cuya estructura corresponde propiamente a la primera etapa del proceso de algebrización y cuya resolución puede requerir técnicas ecuacionales complejas.

En el trabajo en esta etapa aparecen nuevas técnicas (además de las propias de la aritmética escolar) para la *creación* y la *simplificación* de escrituras, como las que rigen la *jerarquía de las operaciones* y las *normas de uso de los paréntesis*. Se requiere asimismo un nuevo entorno tecnológico-teórico que incluye las nociones de *expresión algebraica*, *PC equivalentes* y *ecuación* (con una incógnita) como nuevos objetos matemáticos. También se requieren nuevas técnicas que permitan la manipulación de expresiones algebraicas y el *cálculo ecuacional.*

El paso a la *segunda etapa* se produce cuando el proceso de modelización comporta utilizar, además de los modelos de la primera etapa, un nuevo tipo de modelos cuyo estudio requiere tratar con problemas cuya estructura viene dada mediante la igualdad entre dos PC con los *dos mismos argumentos no numéricos* (x_1, x_2):

$$PC_1(x_1, x_2, a_1, \dots , a_k) = PC_2(x_1, x_2, b_1, \dots , b_s)$$

Entre los problemas de este tipo, muchos se caracterizan porque tanto los «datos» como la «incógnita» vienen dados en forma de *relaciones entre variables* del PC. Un ejemplo sencillo de sistema cuyo estudio requiere trabajar con problemas que se sitúan en esta segunda etapa y en el que el modelo algebraico viene dado por la igualdad entre dos PC es el siguiente[12]:

> Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Cada tipo de fichas tiene un valor determinado de puntos. Supongamos que al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 fichas rojas, mientras que Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 fichas rojas.

---

[11] El problema que formulamos para empezar a estudiar el sistema de los triángulos isósceles inscritos en una circunferencia constituye una pequeña variación del problema anterior y empieza a poner de manifiesto las limitaciones de las técnicas puramente aritméticas (las cuales serían aún más evidentes si nos preguntamos, por ejemplo, «¿Cuánto aumentaría el área si el radio aumentara un 10%?»). Al evidenciar la necesidad de las técnicas algebraicas de simplificación (entre otras) podemos afirmar que esta variación de los problemas resolubles mediante técnicas aritméticas constituye una técnica didáctica útil para llevar a cabo la tarea didáctica de iniciar el uso del instrumento algebraico en la matemática escolar.

[12] En este caso proponemos un ejemplo en el que ambos PC tienen estructura lineal en las variables x_1 y x_2 por ser especialmente adecuado para la introducción temprana (en el primer ciclo de la ESO) del álgebra elemental (Cid y Ruiz Munzón, 2011).

Si llamamos respectivamente B y R al valor en puntos de las fichas blancas y de las fichas rojas, entonces el número de puntos que tiene cada uno de ellos al acabar la partida vine dado por las siguientes *expresiones algebraicas*:

$$20B + 90R \text{ y } 40B + 60R$$

Para estudiar este sistema pueden plantearse diferentes problemas como, por ejemplo: ¿Qué relación debe darse entre los valores respectivos, en puntos, de las fichas blancas y rojas si al final Eva tiene 10 puntos más que Bernardo? Para responder a esta cuestión se requiere transformar globalmente la igualdad de dos PC:

$$20B + 90R = 40B + 60R + 10$$

Primero se *simplifica* la ecuación para obtener una equivalente: $2B + 9R = 4B + 6R + 1$ y luego se utilizan las técnicas de *cancelación* para obtener: $3R = 2B + 1$ y, en definitiva, la relación que debe darse entre los valores en puntos de las fichas blancas y las fichas rojas: $B = (3R - 1)/2$

En esta etapa aparece una mayor complejidad en las técnicas algebraicas que ya estaban presentes en la primera etapa y, además, se requieren nuevas técnicas de manipulación de expresiones algebraicas y, en particular, el uso de la «reducción», que consiste en transformar globalmente la ecuación mediante las técnicas de *cancelación* para obtener una nueva ecuación (o igualdad de dos PC) equivalente a la anterior. Conceptualmente aparecen las nociones de *ecuación con dos variables* (o incógnitas) y *familia de ecuaciones* (con una incógnita) dependiente de un parámetro.

En el caso particular de que la incógnita sea el valor numérico que toma uno de los argumentos no numéricos (dados el valor concreto que toma el otro argumento no numérico y la relación entre los dos PC), entonces el problema se reduce a la *resolución de una ecuación con una incógnita*. Es precisamente en este ámbito muy particular de la segunda etapa (y que también puede aparecer en la primera etapa) donde se sitúa principalmente el álgebra de la escuela secundaria española, más concretamente, en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita y de situaciones que pueden ser modelizadas por estas.

La *tercera etapa* de algebrización se alcanza cuando en el proceso de modelización aparecen sistemas cuyo estudio requiere utilizar, además de los modelos de las dos primeras etapas, otros modelos algebraicos en los que *no se limita el número de argumentos* o *variables* y en los que se necesita eliminar la distinción entre *parámetros* e *incógnitas*, haciendo abstracción de si son «conocidos» o «desconocidos».

La estructura de los problemas que intervienen en esta tercera etapa se materializa en una *fórmula* que puede interpretarse como el *modelo algebraico de un sistema*. El trabajo con dicho modelo persigue, al igual que en las etapas anteriores, aumentar los conocimientos sobre el sistema modelizado mediante el estudio de cuestiones problemáticas que no pueden abordarse en el ámbito del sistema.

Un ejemplo de sistema cuyo estudio mediante un proceso de modelización algebraica puede dar lugar a problemas cuya estructura los sitúa en esta tercera etapa, es el siguiente (Gascón, 1993, pp. 318-320).

Sistema geométrico formado por la familia de los triángulos rectángulos de área A, hipotenusa a y semiperímetro s.

Siguiendo el espíritu de las *Reglas* de Descartes, para empezar a estudiar el sistema debemos buscar la dependencia de cada uno de los elementos del problema respecto de los restantes, «haciendo abstracción de si son conocidos o desconocidos».

En el intento de expresar una de las variables del sistema en función de las restantes, el *análisis reductivo fracasa,* pero al explicitar la síntesis se pone de manifiesto una cantidad, $(b + c)^2$, que puede expresarse de dos maneras diferentes

$$(b+c)^2 = (2s-a)^2 = 4s^2 + a^2 - 4as$$

$$(b+c)^2 = a^2 + 2bc = a^2 + 4A$$

Igualando ambas expresiones se obtiene la fórmula de Herón para el triángulo rectángulo:

$$A = s \cdot (s - a)$$

A continuación debemos deducir la hipotenusa a y el semiperímetro s como si fueran «desconocidos»:

$$a = s - \frac{A}{s}; \qquad s = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + A}$$

Este último modelo puede interpretarse en el sentido que el área A de un triángulo rectángulo es una «medida» de la cantidad de magnitud en que el semiperímetro excede a la hipotenusa (si $A \to 0$, entonces $s \to a$).

Se pone así claramente de manifiesto cual es la razón de ser que la TAD asigna al álgebra elemental: la *modelización algebraica de sistemas* de todo tipo, tal como esta se conceptualiza en Chevallard (1990) y en Gascón (1993, pp. 321-323).

En resumen, podemos afirmar que, utilizando este MER como sistema de referencia, el álgebra escolar tal como se presenta en la ESO española se ubica completamente en la parte más elemental de la segunda etapa del proceso de algebrización, sin llegar a alcanzar plenamente la tercera etapa del mismo. En efecto, en la enseñanza secundaria obligatoria, la *razón de ser asignada oficialmente* al estudio del álgebra escolar consiste en traducir el enunciado de un problema concreto al lenguaje algebraico y resolverlo mediante el planteamiento de un sistema de ecuaciones (normalmente lineales o cuadráticas) reducible a una ecuación con una incógnita[13].

En Ruiz-Munzón (2010) y Ruiz-Munzón et al. (2011) se muestra que este MER del álgebra elemental se articula dentro de un MER más amplio que engloba la modelización funcional, y en Cid y Ruiz-Munzón (2011) y Cid et al. (2017) se propone una nueva versión del MER del álgebra elemental para dar cabida a la introducción temprana (al inicio de la ESO) de los números negativos como objetos algebraicos.

En síntesis, este MER redefine el álgebra elemental como un instrumento de la actividad matemática que transforma la estructura de los diferentes dominios de la matemática escolar, reorganiza la articulación entre ellos y cambia el *tipo de estudio* que es posible llevar a cabo con los mismos. En consecuencia, debe considerarse como una *técnica de ayuda al estudio*, esto es, como una importante *técnica didáctica*.

4. ESBOZO DE UN ANÁLISIS ECOLÓGICO DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL

En esta sección empezaremos a analizar *por qué* la *relación institucional a lo algebraico* en la enseñanza secundaria es la que hemos descrito en la sección 2, esto es, qué condiciones mantienen dicha relación, qué cambios se requerirían para modificarla en la dirección marcada por el MER propuesto y, en definitiva, qué restricciones limitan el desarrollo del álgebra elemental como instrumento de modelización.

Dicho en otros términos, después de responder a algunas de las cuestiones que forman parte de la *dimensión económica* (sección 2), y de dar una respuesta provisional a la *dimensión epistemológica* del problema del álgebra elemental mediante la construcción de un MER (sección 3), vamos a formular y empezar a abordar la *dimensión ecológica* de dicho problema (Gascón, 2011).

---

[13] Las limitaciones que sufre la actividad de modelización algebraica de sistemas que vive en la enseñanza secundaria (cuando la analizamos desde el punto de vista que nos proporciona el MER construido) son obvias y no pueden justificarse por la presunta complejidad de la estructura de los tipos de problemas que intervienen en las últimas etapas del proceso de algebrización. Basta observar, por ejemplo, el problema que hemos propuesto en la segunda etapa (con estructura lineal) y, más en general, los múltiples tipos de problemas elementales en los que tanto los datos como la incógnita vienen dados en forma de relaciones elementales entre variables. Estos tipos de problemas, entre otros muchos, están ausentes en la matemática escolar de la ESO.

Para analizar las condiciones *ecológicas* que se requieren para que determinados objetos y actividades puedan existir en la escuela, Chevallard (2002) introdujo la noción de escala de *niveles de codeterminación didáctica*, que amplía y al mismo tiempo estructura el ámbito empírico que tomaremos en consideración. La organización de las PM y de los dispositivos y los gestos que se necesitan para su enseñanza (las *praxeologías didácticas*, PD) requieren que estos cumplan una serie de condiciones que pueden ser *específicas de la disciplina* en cuestión (en nuestro caso las matemáticas) o bien *genéricas*, es decir, provenientes de la manera de organizar las actividades de enseñanza y aprendizaje en la *escuela*, los roles que se asigna a la escuela en la *sociedad*, etc.

Humanidad

↓↑

Civilización

↓↑

Sociedad

↓↑

Escuela

↓↑

Pedagogía

↓↑

Disciplina ↔ Área ↔ Sector ↔ Tema ↔ Cuestión

Figura 1: Niveles de codeterminación didáctica

Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica según muestra el esquema de la Figura 1. Las condiciones que se imponen en los distintos niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, también restringen el universo de acciones posibles.

Los trabajos sobre la enseñanza del álgebra elemental realizados en la TAD han permitido identificar algunas restricciones provenientes de todos los niveles de la jerarquía de codeterminación didáctica, incluyendo los niveles superiores de la *Civilización* y la *Sociedad* (4.1), los intermedios de la *Escuela* y la *Pedagogía* (4.2) y los específicos que abarcan desde la *Disciplina* hasta las *Cuestiones* (4.3).

4.1. Restricciones provenientes de los niveles de la Civilización y la Sociedad

¿Cuáles son las restricciones de origen cultural y social que tienden a mantener el carácter prealgebraico del currículo escolar? El estudio de este problema puso de manifiesto que para entender lo que pasa en los sistemas didácticos es preciso tomar en cuenta el sistema de enseñanza de las matemáticas en su conjunto así como la noosfera y, a partir de ella, la sociedad y la cultura. El desarrollo de este estudio constituyó el primer ejemplo de *análisis* (*macro*)-*ecológico* de las condiciones de posibilidad de un tipo dado de fenómenos didácticos en un entorno institucional determinado (Chevallard, 1989c).

La *teoría de la transposición didáctica* (Chevallard, 1985) parte de la constatación de que la sociedad tiende a exigir del sistema de enseñanza que el saber que es propuesto para ser enseñado al ciudadano sea compatible tanto con el *saber sabio* que lo legitima como con la *epistemología cultural corriente*. De acuerdo con (Chevallard, 1989c), la cultura occidental se sustenta sobre la postura metafísica del *logocentrismo*, según el término acuñado por el filósofo francés Jacques Derrida (1967), que asume, más o menos explícitamente, que el pensamiento reside en la cabeza, se expresa en voz alta por medio de la palabra y se conserva posteriormente mediante la escritura. Por lo tanto, la escritura es vista como una «degradación» del pensamiento o, a lo sumo, como un producto secundario del mismo: primero se piensa y, después, el pensamiento se plasma en el papel (o la pantalla). Desde este punto de vista, no se valora suficientemente el papel que pueden desempeñar los formalismos científicos (que, en realidad, son productos primariamente escritos y que se «oralizan» posteriormente) como instrumentos de pensamiento científico. No se entiende la necesidad de recurrir a grafismos que no son abreviaciones de conceptos verbales, sino signos escritos productores de significados por sí mismos. El álgebra constituye el primer producto de esta escritura matemática primaria. El cálculo algebraico y, en general, el trabajo con expresiones algebraicas, no es una obra *fácilmente culturizable* (en el sentido de asumible por la cultura corriente) ya que constituye un formalismo que *ha nacido como lenguaje escrito* y no tiene siempre un referente claro en el discurso verbal.

No desarrollaremos más aquí esta fuente de incomprensión cultural hacia la importancia de la «instrumentalidad» del formalismo científico como herramienta de pensamiento, que encontramos bajo distintas expresiones, en diversos ámbitos sociales. Las obras de divulgación con títulos como *Física sin matemáticas* o incluso *La estadística sin fórmulas* ya hablan por sí solas. Lo que queremos subrayar aquí es la importante incidencia de esta postura metafísica sobre los niveles inferiores de codeterminación didáctica, puesto que el alumno no podrá ver reconocidos sus cálculos como «razonamientos» y el profesor deberá buscar nuevos «significados» a esta herramienta que aparece siempre como una pura sintaxis sin una semántica propia. Esta *peyoración cultural del álgebra* queda claramente reflejada en esta cita del eminente geómetra británico contemporáneo Michael Atiyah (2002, pp. 42-43) (la cursiva es nuestra):

> El Álgebra es la oferta que el diablo hace a los matemáticos. El diablo dice: Te daré esta poderosa máquina que responderá a cualquier pregunta que desees. Todo lo que necesitas hacer es darme tu alma, olvídate de la Geometría y te daré esta maravillosa máquina. Por supuesto nos gustaría tener ambas cosas […]. No obstante, el daño a nuestra alma está ahí, *porque cuando entras en cálculos algebraicos* esencialmente dejas de pensar geométricamente, *dejas de pensar en el significado*.

Es interesante apuntar que muchas de las investigaciones didácticas sobre las dificultades en el aprendizaje del álgebra elemental no escapan a este logocentrismo occidental. De ahí que, durante muchos años, una problemática frecuente de estas investigaciones se haya centrado en estudiar los «significados» que los alumnos atribuyen al simbolismo algebraico (Radford, 2000). Tal como hemos descrito en la sección 1, encontramos un gran número de trabajos dedicados al estudio de las dificultades de los alumnos para «entender» —es decir, verbalizar— nociones como las de *ecuación, igualdad, identidad, parámetro*, etc. o, más ampliamente, investigaciones que tratan del estudio de las *concepciones espontáneas* de los alumnos respecto a conceptos fundamentales del álgebra (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Kieran, 1981) o a las letras utilizadas para designar las incógnitas, variables o parámetros (Trigueros et al., 1996; Blanco y Garrote, 2007; Malisani y Spagnolo, 2009).

Esta concentración de las investigaciones relativas al álgebra elemental en la *función semiótica* del lenguaje algebraico, ignorando completamente la *función instrumental* del mismo (Bosch, 1994), constituye un síntoma de la vigencia del logocentrismo e impide que, también en el ámbito de la investigación didáctica, se interprete el álgebra elemental como un instrumento de modelización tal como propone el MER que hemos construido.

4.2. Restricciones provenientes de los niveles de la Escuela y la Pedagogía

En consonancia con la *interpretación psicopedagógica dominante* (Gascón et al., 2004), las organizaciones didácticas escolares tienden a eliminar algunos de los aspectos más característicos de la *disciplina matemática* (por ejemplo, el trabajo técnico *sistemático*, productor de saber) con la «buena intención» de evitar la *desconcertación de los alumnos* y su salida del sistema. Así, se fracciona el proceso de enseñanza de las matemáticas hasta hacerlo desaparecer como tal proceso, convirtiendo la matemática escolar en un conjunto *atomizado* de actividades aisladas aderezadas con elementos presuntamente motivadores (juegos, cercanía a los intereses vitales del alumno, herramientas tecnológicas, etc.). De esta forma se eliminan los objetivos a largo plazo y, en consecuencia, se dificulta y casi se impide el desarrollo del álgebra como instrumento de modelización.

Intentando proteger a los alumnos de toda *desconcertación* y de la «dureza» de la *disciplina matemática* se les empuja, paradójicamente, hacia un estado de *desconcertación permanente* puesto que la atomización excesiva de la actividad matemática escolar, exigida por la necesidad de llevar a cabo una actividad aparentemente *creativa* (en contraposición a todo tipo de actividad rutinaria y sistemática), provoca la necesidad de un cambio constante de actividad, lo que imposibilita el dominio robusto de las técnicas[14]. En estas condiciones, es prácticamente imposible que el álgebra, como herramienta de modelización, pueda «vivir» y «desarrollarse» en la actual educación secundaria.

4.3. Restricciones provenientes de los niveles específicamente matemáticos

En Bolea, Bosch y Gascón (2001a, pp. 291-298) se describen con cierto detalle los efectos de las restricciones originadas por la transposición didáctica de las PM sobre la vida del álgebra elemental en el sistema de enseñanza de las matemáticas. Se trata principalmente de restricciones que provienen o bien de la *necesidad de adecuar* las actividades matemáticas escolares y las prácticas docentes a la *representación institucional* del álgebra elemental, esto es, al modelo epistemológico escolar del álgebra como *aritmética generalizada*, o bien de la *necesidad de evaluar* la actividad matemática de los alumnos y los conocimientos correspondientes.

En lo que se refiere al primer tipo de restricciones, es evidente que la vinculación exclusiva y unidireccional del álgebra escolar con lo numérico, hasta el punto de considerarla como un mero epifenómeno de la aritmética, comporta su aislamiento del resto de las áreas de la matemática escolar y dificulta enormemente el desarrollo del álgebra elemental como instrumento de modelización de cualquier tipo de sistema (matemático o extramatemático). Como ya hemos dicho, esta interpretación escolar del álgebra favorece la consideración de la proporcionalidad como una *relación aritmética entre números* (en lugar de una *relación funcional entre variables*) lo que tiende a aislar la proporcionalidad (y, en última instancia, al álgebra escolar) del resto de relaciones funcionales, dificultando, además, su articulación con la geometría escolar.

Por su parte, las restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la actividad matemática de los alumnos tienden a mantener el carácter prealgebraico de la matemática escolar, dificultando el cambio en la dirección marcada por el MER alternativo propuesto. En efecto, el trabajo que es posible llevar a cabo en PM muy *atomizadas*, en las que predomina la manipulación *formal* de las expresiones algebraicas y en las que no se cuestionan las técnicas ni se requiere ningún tipo de justificación de las mismas, es más fácilmente evaluable que el que se podría llevar a cabo en PM fuertemente algebrizadas. Dicho en otros términos: las *técnicas específicas de la actividad de modelización* (como, por ejemplo, la delimitación del sistema, la elección de las variables relevantes o la interpretación en términos del sistema del trabajo realizado en el modelo), en comparación con las técnicas propias de la aritmética generalizada, son menos visibles, menos atomizables, menos algoritmizables y, en definitiva, más difíciles de evaluar. En consecuencia, las restricciones originadas por la necesidad de evaluar dificultan de manera importante el desarrollo escolar de la modelización algebraica. En el caso de la proporcionalidad estas restricciones contribuyen a potenciar el curioso fenómeno ya citado de la *evitación de las técnicas algebraicas* y a priorizar el uso de la «regla de tres».

5. EL PROBLEMA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

Para analizar el punto de vista del *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) sobre el álgebra elemental, debemos empezar por preguntarnos qué entiende dicho enfoque por «álgebra elemental» y, a continuación, cuál es el problema didáctico que aborda con relación al citado ámbito de la matemática escolar y qué respuestas aporta. Cuestionamos así que los diferentes enfoques en didáctica

[14] La ausencia institucional de un dispositivo didáctico para dar cabida y legitimidad matemática al trabajo técnico dificulta objetivamente el desarrollo de la verdadera creatividad matemática, provocando el fenómeno que hemos denominado *paradoja de la creatividad* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 289-290).

(en nuestro caso, el EOS y la TAD) utilicen los términos básicos (en este caso «álgebra elemental») con el mismo significado y que traten el mismo problema aunque este se enuncie bajo un mismo epígrafe.

Con relación al álgebra elemental, el EOS se interesa en primer lugar por la caracterización del *razonamiento algebraico elemental* (RAE) en el ámbito de la educación primaria (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y su extensión a los niveles de educación secundaria (Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Estos trabajos asumen la necesidad de:

> […] identificar indicadores de la actividad matemática que permitan clasificarla como *aritmética* o *algebraica* o, de forma más precisa, aspectos que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de algebrización. (Godino et al., 2014, p. 201)

Además, se utilizan estos resultados en la formación del profesorado con el objetivo de capacitarlos para el desarrollo del sentido algebraico de sus alumnos.

En el EOS, el criterio para considerar una actividad matemática como «algebraica» viene dado por lo que es considerado como tal por la comunidad didáctica: «una práctica matemática se considera algebraica si presenta cierto tipo de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como *algebraicos*» (Ibíd., p. 204).

Se describen tres niveles de RAE en la educación primaria (junto con el nivel 0, que caracteriza la ausencia de rasgos algebraicos). En términos generales:

> Se asume que se incrementa la algebrización a medida que intervienen objetos intensivos de segundo grado (clases o tipos de intensivos de primer grado, como los números naturales), se expresan de manera alfanumérica y se opera con ellos de manera analítica (sintáctica). (Godino et al., 2015, p. 122)

Es importante subrayar que el nivel de algebrización se asigna a la actividad matemática que se realiza y no a la tarea en sí misma, por lo que una misma tarea puede llevarse a cabo mediante actividades matemáticas diferentes que pueden ser clasificadas en diferentes niveles de algebrización.

Posteriormente se amplían estos niveles con otros tres que caracterizan la matemática de secundaria (incluido el Bachillerato). En el nivel 4 se estudian familias de ecuaciones y funciones usando parámetros y coeficientes; en el nivel 5 se realizan cálculos analíticos que implican el uso de uno o más parámetros, junto con variables o indeterminadas; y en el nivel 6 se comienza a estudiar estructuras algebraicas en sí mismas (Ibíd.).

Se observa, en definitiva, que la noción de «álgebra elemental» está muy ligada en el EOS a los procesos de generalización (y particularización) propios de la actividad matemática:

> Los niveles de algebrización son básicamente grados de generalidad, combinada con el uso de diversos registros de representación semiótica (RRS), sus transformaciones y conversiones (Duval, 1995), los cuales son indicativos de fases en el proceso de reificación de los objetos intensivos intervinientes. Consideramos que para la descripción del carácter algebraico de las prácticas matemáticas es útil fijar la atención en los objetos resultantes de los procesos de generalización, y del proceso dual de particularización. (Ibíd., p. 130)

Dado que en la TAD los procesos de generalización y el grado de generalidad desempeñan un papel relativamente secundario en la redefinición del álgebra elemental, aparece un primer rasgo de «inconmensurabilidad» local entre ambos enfoques.

En cuanto al problema didáctico que plantea y aborda el EOS con relación al álgebra elemental, podemos decir que, en primera instancia, se trata del problema de cómo describir indicadores de la actividad matemática que permitan establecer una graduación en diferentes niveles de RAE. Complementariamente, el EOS pretende caracterizar las «brechas o discontinuidades ontosemióticas» que pueden tener lugar en la realización de las tareas matemáticas escolares cuando estas requieren situarse en los sucesivos niveles de razonamiento algebraico y elaborar propuestas de enseñanza que contemplen el progreso de los estudiantes a medida que avanzan en dichos niveles.

Es cierto que el EOS, como la TAD y otros muchos enfoques —como, por ejemplo, el *early algebra* (Kieran et al., 2016)—, postulan la necesidad de cuestionar y eventualmente modificar las organizaciones matemáticas y didácticas escolares en torno al álgebra elemental. Pero, más allá de los cambios curriculares que el EOS pueda proponer como consecuencia de estas investigaciones, ¿se plantea las cuestiones que constituyen el núcleo de las dimensiones económica y ecológica del problema didáctico del álgebra elemental tal como se considera en la TAD[15]?

Además, en la TAD, la dimensión epistemológica del problema es básica y fundamental. De hecho, el cuestionamiento de la razón de ser que el sistema escolar asigna oficialmente al álgebra elemental se fundamenta en las limitaciones que presenta el MED en la institución de secundaria para sustentar organizaciones didácticas que superen determinados fenómenos didácticos considerados «indeseables» en base a los principios o asunciones básicas de la TAD. El MER alternativo que se construye como referencia para sacar a la luz y estudiar dichos fenómenos constituye una hipótesis científica, parcialmente contrastada, según la cual es posible diseñar procesos didácticos (sustentados en el MER en cuestión) de manera que la comunidad de estudio acabe utilizando el álgebra elemental como un instrumento de modelización de sistemas de todo tipo, superando así las «limitaciones» originadas por su identificación con una aritmética generalizada (Gascón y Nicolás, 2017).

En síntesis, el objetivo para el cual la TAD construye un MER, que redefine el álgebra elemental como un proceso de algebrización estructurado en tres etapas, no es otro que el de estudiar la economía y la ecología de este ámbito de la matemática escolar y dar cuenta, en primera instancia, de ciertos fenómenos didácticos que emergen en la institución de enseñanza secundaria. Este es el objeto de estudio primario de la didáctica, según la TAD. Los resultados de este estudio, cuya base empírica incluye datos provenientes de todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica, sustentan el diseño y la gestión de REI cuya experimentación permite contrastar empíricamente, y en su caso modificar, el MER inicial con el objetivo de sacar a la luz fenómenos nuevos o aspectos de los fenómenos didácticos que habían quedado ocultos.

En consecuencia, las etapas del proceso de algebrización y los niveles de RAE desempeñan funciones muy diferentes en cada uno de los enfoques. En coherencia con esta disimetría, los criterios para caracterizar los niveles de algebrización en el EOS y los que se utilizan en la TAD para describir las etapas del proceso de algebrización son de distinta naturaleza, por lo que su comparación es muy arriesgada. En efecto, mientras que la TAD se basa en indicadores del grado de algebrización que hacen referencia a características estructurales y funcionales de las PM consideradas como un todo y que, en última instancia, dependen del modelo epistemológico general de las matemáticas que sustenta la TAD, los criterios que emplea el EOS se refieren a la actividad efectivamente desarrollada por los sujetos, en términos del grado de generalidad de los objetos, transformaciones y lenguajes que estos utilizan.

En resumen, podemos afirmar que los problemas que el EOS y la TAD se plantean en torno a lo que cada uno de estos enfoques denomina «álgebra elemental» son de diferente naturaleza, lo que introduce otro rasgo de «inconmensurabilidad» entre ambos enfoques.

Como ejemplo de las consecuencias de la diferente forma de interpretar el problema didáctico del álgebra elemental podemos citar, para acabar, las dos maneras de dar cuenta de un «mismo» hecho didáctico[16]. El EOS propone una posible hipótesis explicativa de algunas de las dificultades que aparecen en el aprendizaje del álgebra en base a que «el diseño curricular, las lecciones de los libros de texto y la actuación

[15] Como, por ejemplo, ¿cuáles son las limitaciones de la enseñanza escolar del álgebra que el EOS pretende superar?, ¿qué fenómenos didácticos «indeseables» (en base a los principios o asunciones básicas del EOS) ponen de manifiesto dichas limitaciones?, ¿en qué dirección modificar el papel que desempeña el álgebra en la enseñanza de las matemáticas?, ¿cómo explicar la permanencia de una organización didáctica escolar en torno al álgebra que presenta las características que hemos descrito así como las grandes dificultades para modificar dicha organización en una dirección determinada?

[16] Dado que el EOS y la TAD no coinciden en la forma de interpretar el álgebra elemental, no parece razonable suponer que interpretan de la misma forma las «dificultades» escolares que aparecen en el aprendizaje del álgebra.

de los profesores en el aula no tienen en cuenta, con la atención necesaria, la complejidad de objetos y procesos que se ponen en juego en las prácticas matemáticas escolares» (Godino et al., 2015, p. 137).

Debido a la amplitud de la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos que propugna la TAD (Bosch y Gascón, 2004), para dar cuenta de las «dificultades» de los alumnos y los profesores en la enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental es necesario tomar en consideración las restricciones institucionales de todo tipo que hemos descrito brevemente en la sección 4. Esto significa que, más allá de la complejidad ontosemiótica de los objetos y los procesos que se ponen en juego, hemos de considerar la incidencia de las restricciones que provienen de todas las instituciones que intervienen en el proceso de transposición y de todos los niveles de codeterminación didáctica.

Esto no significa que, cuando analizamos la actividad matemática que tiene lugar en el aula, no sea posible hacer determinadas comparaciones[17] puntuales entre los componentes de la praxis que, de manera más o menos paradigmática, forman parte de los diferentes niveles de algebrización (según el EOS) por un lado y de las sucesivas etapas del proceso de algebrización (según la TAD) por otro. Pero este tipo de comparaciones puede llevar a malentendidos si aislamos dichos componentes de la actividad matemática global y del problema al que responden los niveles en el EOS y las etapas en la TAD.

En resumen, consideramos que cualquier comparación entre la forma como dos enfoques teóricos en didáctica (como, por ejemplo el EOS y la TAD) responden ante un problema (como, por ejemplo, el problema didáctico del álgebra elemental) debe hacerse partiendo de un análisis crítico de lo que cada uno de los enfoques define como tal problema, en qué términos lo formula, cuál es el ámbito institucional en el que lo sitúa, cómo lo relaciona con otros problemas didácticos y cuál es el tipo de respuestas que considerará aceptables. Este análisis nos llevará inevitablemente a preguntarnos sobre lo que cada uno de los enfoques considera como «problema didáctico» y, en última instancia, a iniciar un debate –continuamente aplazado– sobre las diferentes formas de interpretar el objeto de estudio de la ciencia didáctica que todavía subsisten en nuestra comunidad.

Referencias

Assude, T., Coppe, S. y Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège: atomisation et réduction. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds) *Recherche en didactique des mathématiques. Enseignement de l'algèbre, élémentaire. Bilan et perspectives* (pp. 41-62). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Atiyah, M. (2002). Las matemáticas en el siglo XX. Traducción en *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *50*, 35-55.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educ. Matem. Pesq*., *15*(1), 1-28.

Behr, M., Erlwanger, S. y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, *92*, 13-15.

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra. Accounting for the reasonings and notations developed by students. En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference*, Melbourne, Australia: The University of Melbourne, vol. 1 (pp. 69-78).

Blanco, L., Garrote, M. (2007). Difficulties in Learning Inequalities in Students of the First Year of Pre-University Education in Spain. *Eurasia Journal of Mathematics, Science y Technology Education*, *3*(3), 221-229.

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

[17] De acuerdo con Kuhn, consideramos que ni en su forma metafórica ni en su forma literal *inconmensurabilidad* implica *incomparabilidad*.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1998). Le caractère problématique du processus d'algébrisation: le cas de la proportionnalité et des grandeurs, En M. Bailleul, C. Comiti, J.L. Dorier, J.B. Lagrange, B.I. Parzysz y M.H. Salin (Eds.), *Actes de la IXème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, 153-159, ARDM.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organisation. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education*, vol. II (pp. 135-145). Osnabrück (Germany): Forschungsinstitut fuer Mathematik didactik.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21*(3), 247-304.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001b). ¿Cómo se construyen problemas en didáctica de las matemáticas? *Educación Matemática*, *13*(3). Parte I: El álgebra escolar en el Programa Cognitivo (pp. 22-40); Parte II: El álgebra escolar en el Programa Epistemológico (pp. 40-63).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, *14*, 125-133.

Booth, L. (1984). *Algebra. Children's Strategies and Errors*, Windsor, NFER-Nelson.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M., Fonseca, C. y Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *24*(2-3), 205-250.

Bosch, M. y Gascón, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.), *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas*, (pp. 135-159). Barcelona: Edebé

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Cid, E. (2016). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, España.

Cid, E. y Ruiz-Munzón, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En M. Bosch et al. (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Cid, E., Bosch, M., Gascón, J. y Ruiz-Munzón, N. (2017). Integración de los números negativos en el modelo epistemológico de referencia de la modelización algebraico-funcional. En G. Cirade et al. (Éds), *Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société* (pp. 325-341). [Disponible en https://hal.archives-ouvertes.fr]

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie. L'évolution de la transposition didactique, *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1985). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage (2ª édiction 1991).

Chevallard, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x*, *19*, 45-75.

Chevallard, Y. (1989b): *Arithmétique, Algèbre, Modélisation. Étapes d'une recherche*. Publications nº 16 de l'IREM Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1989c): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, [Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille].

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie. Perspectives curriculaires : vois d'attaque et problèmes didactiques, *Petit x*, *23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. En J.-L. Dorier, Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R. Floris, R. (Eds) *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En Ducourtioux, C. y Hennequin, P.-L. (Éds.) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*. Publications de l'APMEP nº 168, 239-263. Paris: APMEP.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques. Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 19-39).

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE/Horsori.

Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L. y Robert A. (Eds.) (2012) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Derrida, J. (1967). *De la grammatologie*. París: Les Editions de Minuit.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics 9*, 19-25.

Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.

Fonseca, C., Bosch, M. y Gascón, J. (2010). El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la división sintética y la factorización de polinomios, *Educación Matemática*, *22*(2), 5-35.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*, Dordrecht: Reidel Publishing Company.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria, *Investigación en educación matemática XI*, pp. 71-90.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics, *ZDM International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226-246.

Gascón, J. (1989). *El Aprendizaje de Métodos de Resolución de Problemas de Matemáticas*. (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Matemàtiques.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée». *Petit x*, *37*, 43-63.

Gascón, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática*, *11*(1), 77-88.

Gascón, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Editor): *Actas del III Simposio de la SEIEM*, (pp. 129-150). Valladolid.

Gascón, J. (2001). Reconstrucción de la divisibilidad en la Enseñanza Secundaria. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigação*, *10*(2), 33-66.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *14*(2), 203-231.

Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas, *Educación Matemática*, (Special Issue: XXV years), 99-123.

Gascón, J., Muñoz-Lecanda, M., Sales, J. y Segura, R. (2004). Matemáticas en Secundaria y Universidad: razones y sinrazones de un desencuentro, Comunicación invitada en las *Xornadas sobre Educación Matemática*, Santiago de Compostela, 16-18/09/2004.

Gascón, J. y Nicolás, P. (2017). Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico, *Educaçao Matemática Pesquissa* (Special Issue).

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica, *Avances de investigación en Educación Matemática*, *8*, 127-142.

Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F. y Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. En L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques. Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 137-162). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Kaput, J. (1987). Algebra papers: A representational framework. En N. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp.345-354.

Kaput, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustenta la reforma del álgebra? (I y II), *UNO*, *n. 9*, 85-97 y n. 10, 89-103.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching. ICME-13 Topical Surveys*. Springer International Publishing.

Klein, J. (1934/1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*, Dover Publications: New York.

Malisani, E. y Spagnolo, F. (2009). From arithmetical thought to algebraic thought: The role of the "variable". *Educational Studies in Mathematics*, *71*, 19-41.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos, México. [Recuperable en http://cuaed.unam.mx/math_media/anexos/articulos/acerca_caracter_algebraico.pdf]

Radford, L. (2000) Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics 42*, 237–268.

Radford, L. y Grenier, M. (1996): Entre les choses, les symboles et les idées... une séquence d'enseignement d'introduction à l'algèbre, *Revue des sciences de l'éducation*, XXII/2, 253-276.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2010) La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 655-676). Montpellier, Francia: IUFM de l'Académie de Montpellier.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: the case of school algebra, *CERME 8* (6-10 febrero, Turkey). http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Bosch.pdf

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2015). El problema didáctico del álgebra elemental: un análisis macro-ecológico desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *REDIMAT*, *Vol. 4*, No. 2, 52-77.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Numéro spécial, *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*, Coordonné par L. Coulange et J-P. Drouhard, 87-106.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification. The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191-228.

Sierra, T. A., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática. El caso del algoritmo de la multiplicación, *BOLEMA*, *27*, nº 47, pp. 805 - 828.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, *14*(3), 351-363.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level, en A. Bell, B. Low y J. Kilpatrick (comps.), *Theory Research y Practice in Mathematical Education*, (pp.27-45). University of Nottingham, Shell Center for Mathematical Education.

Whitney, H. (1968).The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity Structures and Dimensional Analysis, *American Mathematical Monthly*, *75*, 227-256.